848 - نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x+2-\sqrt{x(x+2)} & ; x<-2 \\ f(x) = \operatorname{Arctan}\sqrt{x+2} & ; x\geq -2 \end{cases}$$

$\mathcal{C}$ يرمز لمنحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

A. 1] بيّن أن f متصلة في -2 .

2] أ) ادرس قابلية اشتقاق f على اليسار في -2

ب) بيّن أن : $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ x>-2}} \frac{f(x)}{x+2} = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{t}{\tan^2 t}$. هل الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في -2 ؟

3] حدد تغيرات f .

4] أ) ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $\mathcal{C}$.

ب) بيّن أن : $f(x)-(2x+3)>0$ $(\forall x\in]-\infty;-2[)$

ج) ارسم $\mathcal{C}$.

5] لتكن g قصور f على المجال $I=]-\infty;-2[$.

بيّن أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده، ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

B. لتكن h قصور f على $[0;2]$ و $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية بحيث $a_0=2$ و $a_n=h(a_{n-1})$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

1] بيّن أن $0<a_n\leq 2$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ وبيّن أن (a_n) تناقصية قطعاً .

2] أ) بيّن أن المعادلة $h(x)=x$ تقبل في $]0;2[$ حلا وحيداً α

ب) بيّن أن $h'(x)\leq \frac{1}{6\sqrt{2}}$ $(\forall x\in[0;2])$ واستنتج أن :

$(\forall n\in\mathbb{N})$ $|a_{n+1}-\alpha|\leq \frac{1}{6\sqrt{2}}|a_n-\alpha|$

ج) بيّن أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\alpha$

832 - نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$$

وليكن $\mathcal{C}$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم.

1] أ) تحقق أن: $x+\sqrt{1+x^2}>0 \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

ب) احسب النهايات التالية $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

ثم استنتج الفرعين اللانهائيين للمنحنى $\mathcal{C}$.

2] أ) بيّن أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن: $2f'(x)\sqrt{1+x^2}=f(x) \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

ب) استنتج منحى تغير f على $\mathbb{R}$.

3] أ) بيّن أن: $2(1+x^2)f''(x)=f'(x)\left(\sqrt{1+x^2}-2x\right) \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

ب) بيّن أن المنحنى $\mathcal{C}$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة و ادرس تقعر $\mathcal{C}$.

4] ارسم المنحنى $\mathcal{C}$.

5] بيّن أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]1;+\infty[$ وأن: $2<\alpha<3$.

6] أ) بيّن أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}_+^*$ ثم حدد تقابله العكسي f^{-1}.

ب) ارسم المنحنى الممثل للتقابل f^{-1} في نفس المعلم الذي رسم فيه $\mathcal{C}$.

7] نعتبر الدالة φ المعرفة على المجال $\left[0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ بما يلي:

$$\varphi(x)=\frac{1+f(x)}{2}-f\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{\lambda}{8}x^2$$

حيث λ عدد حقيقي يحقق $\varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0$

أ) بيّن أنه يوجد عدد حقيقي a من $\left]0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ بحيث $f'(a)-f'\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{\lambda}{2}a$

ب) بيّن أنه يوجد عدد حقيقي b من $\left]\frac{a}{2};a\right[$ بحيث: $\lambda=f''(b)$

ج) استنتج أن: $\left|f\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)-\frac{1+\sqrt[4]{3}}{2}\right|\leq\frac{\sqrt[4]{3}}{96}$

834 - نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$$

وليكن $\mathcal{C}$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1] تحقق أن $x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x-1)^2$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم حدد حيز تعريف f.

2] احسب النهايات $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{f(x)}{x-1}$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{f(x)}{x-1}$ و $\lim\limits_{\substack{x \to (-2) \\ x > -2}} \frac{f(x)}{x+2}$

وأول النتائج المحصل عليها هندسيا.

3] ادرس تغيرات الدالة f.

4] أ) بين أن المستقيم الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للمنحنى $\mathcal{C}$.

ب) ارسم $\mathcal{C}$.

835 - نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}$

وليكن $\mathcal{C}$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) بيّن أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ مقارب للمنحنى $\mathcal{C}$.

3) بيّن أن f تزايدية قطعاً على $]-1;+\infty[$ وضع جدول تغيرات f.

4) بيّن أن المنحنى $\mathcal{C}$ يقبل في $M_0(-1;0)$ نصف مماس موازٍ لمحور الأراتيب

5) أ) لتكن f'' الدالة المشتقة الثانية للدالة f.

بيّن أن: $(\forall x>-1)\quad f''(x)=2x\left(x^3+1\right)^{-5/3}$

ب) حدّد (معلّلاً جوابك) نقطة انعطاف المنحنى $\mathcal{C}$

6) أنشئ المنحنى $\mathcal{C}$.

7) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي: $g(x)=f(x)$

أ) بيّن أن g تقابل من $\mathbb{R}_+$ نحو مجال E يتم تحديده.

ب) حدّد $g^{-1}(x)$ لكل x من E.

ج) أنشئ منحنى g^{-1} في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

850 - لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = \text{Arctan}\left(\sqrt[3]{x^3+1} - x\right)$$

وليكن $\mathscr{C}$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1] احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2] ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في -1 وأول هندسياً النتيجة.

3] ادرس تغيرات الدالة f.

4] ارسم المنحنى $\mathscr{C}$.

5] لتكن g الدالة المعرفة بما يلي : $g(x) = \frac{1}{9}\left[\left(\tan f(x) + x\right)^3\right] - \frac{2}{3}\text{Arctan}\, x$

أ) حدد حيز التعريف E للدالة g ثم بين أن:

$$(\forall x \in E) \quad g(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x^3+1}{3} - 2\text{Arctan}\, x\right)$$

ب) بين أن : $(\exists! \alpha \in [-1;1]) \; ; \; g(\alpha) = \alpha$

ج) بين أن : $(\forall x \in]-1;1[) \quad |g'(x)| \leq k$ حيث k عدد حقيقي من $]0;1[$ يتم تحديده.

6] نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $-1 \leq v_0 \leq 1$ و $(\forall n \in \mathbb{N}) \; v_{n+1} = g(v_n)$

أ) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |v_n| \leq 1$

ب) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; |v_{n+1} - \alpha| \leq k|v_n - \alpha|$

ج) استنتج أن المتتالية (v_n) متقاربة وحدد نهايتها.

د) حدد قيمة مقربة بالدقة $0,1$ وذلك بأخذ $v_0 = 0$